Описание явлений недифференциальной природы средствами непрерывной математики

Начнем с примера неудачного прогнозирования хода физического процесса в общеобразовательном курсе физики. Это процесс торможения материальной точки, движущейся в вязкой среде со сравнительно небольшой скоростью. Мы увидим, что в некоем диапазоне скоростей и масс материальной точки простая физическая теория дает вполне приличный прогноз характера изменения скорости. Но имеются такие диапазоны скоростей и масс, в которых прогноз становится неверным. На это в учебниках не принято обращать внимания. А напрасно. Не выходя за рамки программы общеобразовательной физики, можно легко разобраться в условиях, когда теория перестает работать. Так профессиональные физики и поступают – физическая теория считается приличной, только если указаны пределы ее применимости. В непрофессиональной, общеобразовательной физике, так не принято. В связи с чем физика становится средством оглупления, sorry.

Проследим за обычными рассуждениями и внимательно присмотримся к тем условиям, в каких теория начинает давать неверный прогноз.

Утверждаем, что при небольшой скорости движения v материальная точка массы m испытывает в вязкой среде силу сопротивления $f = -kv$. Здесь k – коэффициент вязкого трения, зависящий от характеристик среды и от формы тела. Мы упрощаем задачу, неявно учитывая форму тела в этом коэффициенте и пользуясь динамикой материальной точки. При желании модно явно учесть форму тела, как это делается в законе Стокса. Записываем уравнение движения на основе второго закона Ньютона

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v.$$

Задаем начальное условие для скорости: при $t = 0$ $v = v_0$.

Получаем известное решение

$$v(t) = v_0 \exp(-\frac{k}{m}t).$$

На основе полученного решения высказываем прогноз – скорость материальной точки в вязкой среде никогда не упадет до нуля.

Конечно, можно избежать скандала, прикрывшись вполне умной фразой – требуется бесконечно протяженный промежуток времени, чтобы скорость обратилась в ноль.

Так позволено сказать математику. Они, математики, придумывают математические, а не природные объекты, тщательно исследуют их свойства и при описании этих свойств свободно пользуются такими неадекватными Природе понятиями, как бесконечно малое изменение чего-то и бесконечно большая величина. Спасибо математикам, их усилиями мы вооружены средствами, позволяющими нам не ошибаться при выводе следствий из заранее истинных положений. Но физик должен пользоваться неадекватными Природе понятиями с осторожностью. Во всяком случае, такие понятия не должны просачиваться в окончательное суждение физика об исследуемом предмете. Позволю себе выразить эту мысль в форме народной приметы:

Если суждение физика о предмете включает в себя бесконечность, значит, физик здесь чего-то не понимает.

Так что, приведенная выше умная фраза не позволит лектору избежать скандала. Если аудитории известна эта народная примета, такая фраза, напротив, вызовет скандал – чего это нам читает лекцию некомпетентный физик?

Продолжим рассмотрение процесса. Прогноз получается некачественным, поскольку опыт его опровергает. Если толкнуть лодку, стоящую на зеркальной поверхности озера в безветренную погоду, то через некоторое время, пройдя некоторое расстояние, лодка останавливается.

Кто виноват, что прогноз не оправдывается?

Математика не может быть виноватой – что в нее заложили, то она и преобразует в другую форму, ничего не добавляя умного. Следовательно, виновата физика. Какие-то неудачные физические представления заложены в самые начальные рассуждения о ходе процесса.

Неудачным является предположение, что в течение всего процесса торможения скорость движения v материальной точки является дифференцируемой величиной. В частности, предполагается, что в любой момент, при любой величине v она может быть уменьшена на бесконечно малую величину dv в соответствии с законом $dv = -\frac{k}{m}vdt.$ Однако это предположение оказывается неверным, когда скорость точки становится сравнимой со скоростью теплового хаотического движения частицы массы m. Среднеквадратичная скорость частицы массы m определяется только абсолютной температурой T среды:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Конечно, для макроскопической частицы это очень малая величина. Но важно, что ситуация с неудачным прогнозом проясняется. При очень малой скорости материальной точки ее скорость перестает быть дифференцируемой величиной. И мы теперь имеем критерий для ограничения области действия полученного решения.

Кстати, в каких-то прикладных исследованиях может возникнуть необходимость проследить и теоретически, и экспериментально за торможением в жидкости или в газе какой-то очень легкой частицы. Из последней формулы видно, что среднеквадратичная скорость частицы возрастает с уменьшение массы частицы. Поэтому предел справедливости закона экспоненциального падения скорости частицы наступит при вполне заметной скорости. И область применения этого закона может оказаться очень узкой. А в эксперименте, еще прежде достижения этого предела будут наблюдаться флуктуации скорости частицы. На экспоненту будет похожа только средняя линия, проведенная меж экспериментальных значений скорости частицы.

В совсем уж предельном реальном случае, если мы, как когда-то ботаник Браун (Brown), с размаху бросим в каплю воды под микроскопом частичку цветочной пыльцы, то мы не будем наблюдать никакого торможения частицы. Частица сразу станет совершать беспорядочные движения. Будет наблюдаться броуновское движение частицы. И ничего больше.

Не подумайте, что наблюдать броуновское движение и размышлять над его закономерностями так уж неинтересно. Этим занимались Эйнштейн и Смолуховский. И у них получилось что-то дельное.

Еще более ярко данная проблема проявляется в задаче о динамике экологической системы, где сосуществуют Хищники и Жертвы. Такая задача выходит за рамки курса физики. Но ее часто включают в курс физики для химиков, поскольку исторически сложилось так, что математически эта задача впервые была сформулирована для описания химических автокаталитических процессов. Это такие процессы, в которых различные компоненты химической системы ведут борьбу за ресурсы. В частности, похожим закономерностям подчиняются периодические реакции Белоусова-Жаботинского. Эта же задача часто рассматривается в курсе «Концепции современного естествознания». Может быть, как раз в связи с экологией.

Напомним постановку этой задачи и технику ее решения.

Имеется обширный лес с полянами, где растет трава, где резвятся кролики. Будем называть их Rabbits, а их популяцию в тысячах обозначать переменной R. Площадь, занятую травой, будем измерять в процентах от общей площади леса, и обозначать переменной G (Grass). Учтем, что кроликам не дают умереть в своих постельках Лисы, популяцию которых в тысячах будем обозначать переменной F (Foxes). Лисам тоже не грозит умирать от старости. В этих угодьях планово работают охотники, добывающие на продажу лисьи шкуры. Численность охотников мы не будем учитывать явно, а сведем их деятельность к высокой вероятности смерти лисицы в результате случайно-плановой встречи с охотником.

Будем считать, что трава представляет собой возобновляемый ресурс. Пусть сегодня кролики съели всю траву на полянах, но Природа милостива. Идут дождики, светит Солнце, корни травы не повреждены. Завтра трава вырастет снова. Но ясно, что чем больше площадь полян, тем вольготней кушают и размножаются кролики.

Динамику популяций R и F можно прогнозировать, составив и решив систему дифференциальных уравнений

$$dR/dt = k_{rb}GR - k_{rd}RF, \qquad (1)$$

$$dF/dt = k_{fb}RF - k_{fd}F, \qquad (2)$$

где k_{rb} - коэффициент рождаемости кроликов (rabbits birth), k_{rd} - коэффициент смертности кроликов (rabbits death), k_{fb} - коэффициент рождаемости лис (foxes birth), k_{fd} - коэффициент смертности лис (foxes death) в результате деятельности охотников. Остальные обозначения были приведены выше.

Уравнения (1-2) составляют довольно сложную систему со сложным поведением. Возможны различные типы решений. В частности, возможно стационарное, равновесное состояние популяций. Приравниваем нулю производные в (1-2) и видим, что в стационарном случае система уравнений распадается на два независимых уравнения, из которых находим

$$F_0 = k_{rb}G/k_{rd}, \qquad (3)$$

$$R_0 = k_{fd}/k_{fb}.$$

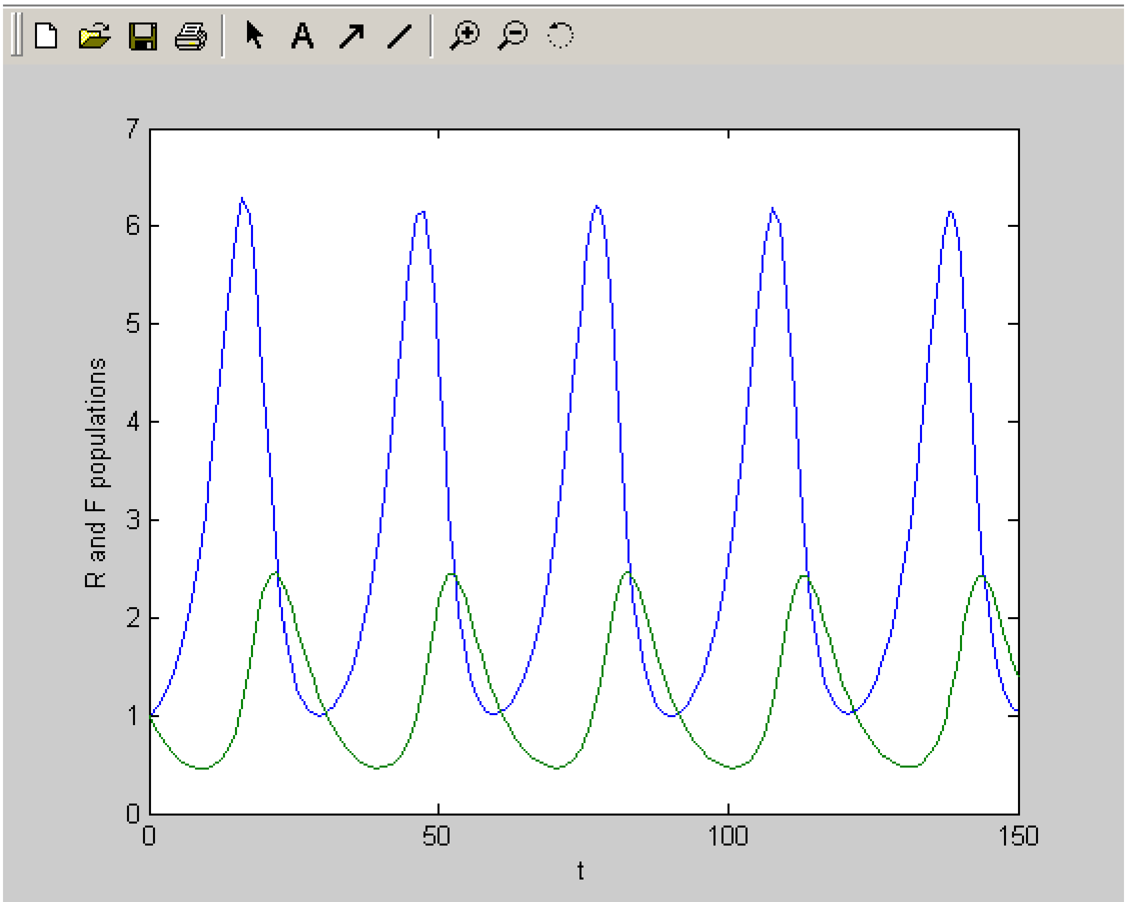
Может вызвать некоторое удивление, что лисья стационарная популяция определяется исключительно кроличьими параметрами, а кроличья – лисьими, куда неявно включена деятельность охотников. Из (3) видно, что увеличение площади полян с травой приведет к увеличению стационарной популяции лис, а не популяции кроликов, как может ожидать неподготовленный человек. На стационарной же популяции кроликов увеличение их пищевого ресурса никак не скажется.

Если начальные условия для популяций заметно отличаются от стационарного состояния системы F_0 и R_0, то в системе начинаются колебания. И чем дальше система от стационарного состояния, тем больше амплитуда колебаний.

Не будем здесь анализировать колебательное состояние системы. Об этом подробно написано в вики-библиотеке Натурфилософия в лекциях, посвященных принципу дополнительности Бора. Лекции размещены по адресу

http://intranet.geokhi.ru/Naturphilosophy/Домашняя.aspx

Приведем лишь одно из решений системы (1-2), полученное в этих лекциях.



Нелинейные колебания при большом удалении модели от стационарного состояния. Популяция кроликов изображена синей кривой, а популяция лис – зеленой.

Видим, что при больших отклонениях от равновесия в некоторые моменты времени численность популяции лис опасно приближается к нулю. Но, как можно проверить, при любом варьировании начальных условий не может быть получена нулевая численность лис. И можно сделать прогноз, что в такой системе никогда не может случиться экологическая катастрофа.

Этот прогноз никуда не годится. Мы понимаем: если охотники будут столь же последовательно и упорно добывать лисьи шкурки, как и при малых колебаниях популяций, то вполне вероятен случай, когда не останется пары лис, чтобы продолжить их род. Тогда случатся три катастрофы. Экономическая – охотникам придется осваивать другую профессию. Биологическая – исчезнут лисы, порода которых, могло статься, была уникальной. Экологическая – в отсутствии хищников кролики размножатся экспоненциально, как это было в Австралии на самом деле.

Мы теперь хорошо понимаем, почему прогноз, выполненный на основе уравнений (1-2), имеет шанс провалиться. Такие природные объекты, как кроличье или лисье семейство, это объекты недифференциальной природы. Сама Природа считает членов таких семейств и численность популяций на штуки, а мы хотим в своих рассуждениях видеть лишь огромные популяции R и F, которые в любой момент могут быть уменьшены на dR или на dF. Не получится, если $F = 2$.

Из приведенного примера сложной экологической системы видно, что более адекватным аппаратом для описания и прогнозирования событий в системе является аппарат дискретной математики. Это может быть, например, техника клеточных автоматов, описанная в статье про экстракцию на этом же сайте в разделе **Общекультурные средства, способные помочь в организации междисциплинарных исследований**

.