Некоторые вопросы теории и практики при определении искомого сигнала в присутствии шума.

Емельянов В.В.

- Среди большого числа задач, встречающихся в различных видах исследований, когда искомый сигнал может быть получен путем применения косвенного метода, химико-аналитические исследования занимают постоянное место. Роль аналитической химии при проведении таких измерений высока и ответственна. В одной, опубликованной в 1999 году монографии в разделе «Метрологические основы аналитической химии» привлечено внимание к тому, что «при проведении химического анализа сейчас важную роль играют физические методы – спектроскопические и ядерно-физические. Таким образом, аналитическая химия приобретает черты междисциплинарной науки. Теоретический базис аналитической химии, среди прочих, включает вопросы разработки метрологии автоматизации, математизации методов анализа, включая отработанные приемы выявления и устранения помех и, способов обработки результатов измерений».

Дополнение.

- «Экспериментатор, получив выборку должен составить достоверное представление о поведении генеральной совокупности».
- «Экспериментатор вправе назначить объем выборки, но выводы он обязан делать с учетом всего мыслимого набора данных».

- При проведении химического анализа исполнители уделяют должное внимание очистке так называемой химической матрицы; разумеется с целью устранения факторов, под влиянием которых могут возникнуть погрешности, способные существенно изменить результат измерения. Такие факторы называют матричными компонентами мешающего характера. Но аналогичные факторы, помехи, могут возникнуть в измерительном устройстве, в помещении, где проводятся измерения и, даже в полученной выборке. И все они должны быть устранены.

- В книге Н.М. Кузьмина, посвященной качеству результатов при проведении химико-аналитических исследований, отмечено что, полученную выборку нужно так преобразовать, чтобы при ее статистической обработке можно было применить теорию ошибок.

- После того, как факторы, под влиянием которых могли возникнуть шумы, способные существенно изменить результаты, то есть, сделать их неправильными, убраны; возникает задача фильтрации случайных ошибок, «для чего необходима четкая, правильно поставленная задача. При правильно поставленной задаче должны быть указаны все исходные данные, которые могут быть использованы и, таким образом, фактически, будет изложен метод решения задачи, в котором четкие соображения, высказанные в принципе, могут быть переложены на математический язык».
- После того, как соображения, в принципе, будут высказаны, известная формула должна принять вид:

$\mu_S = \mu_{S+B} - \mu_B$ (1), где: μ_B – белый шум;

μ_{S+B} – чистая сумма; μ_S – чистый сигнал. Если μ_B и μ_{S+B} будут преобразованы в случайные события, то для этих случайных событий могут быть найдены их законы распределений. И тогда, по правилам исчисления случайных событий может быть найден закон распределения чистого сигнала. Для того, чтобы чистый сигнал был правильным необходимо, чтобы события μ_B и μ_S были взаимно независимы и имели один закон распределения, а полученный чистый сигнал, рассчитанный по правилам исчисления случайных событий, будет представлен в виде теоретико-множественной разности.

- Итак, высказанные в принципе, соображения приведены, переложены на математический язык и, использованы при решении задачи, сформулированной в уравнении:

$$\mu_S=\mu_{S+B} - \mu_B \quad (1), \text{ где}$$

μ_S – искомый сигнал, μ_{S+B} - μ_B – вычисленная разность, μ_B – белый шум.

- Из уравнения (1) следует, что будет проведено два самостоятельных измерения:

I – количественно определено значение μ_B – белого шума;

II – количественно определено значение суммы двух случайных событий μ_{S+B} ;

III – вычислена разность μ_{S+B} - μ_B .

- I μ_B представляет собой множество действительных чисел, случайную величину, которая по определению имеет свой закон распределения. Для того, чтобы найти закон распределения плотности вероятности случайной переменной величины, необходимо эту величину преобразовать в случайное событие.

Уравнения преобразований.

Примечание: В аксиоматической теории вероятности принято: прежде всего рассматривать Пространство элементарных событий - Ω, заполненное элементарными событиями – ω, алгебру событий - $\mathcal{F}$ и P – вероятность. Все вместе принято называть вероятностным пространством.

μ_B $\{\omega: -\infty < \xi_B(\omega) < x\}$; (2) $P(\mu_B)$ $\{\omega: -\infty\ \xi_B(\omega) < x\} = F_{\xi B}(x)$ (3)

Из чего следует, что – вероятность функция

Аргумент вероятности – случайное событие

Нахождение распределения суммы двух случайных событий.

II μ_{S+B} В отличие от μ_B – математического ожидания случайной величины белого шума; μ_{S+B} представляет собой математическое ожидание суммы двух случайных величин – искомого сигнала и белого шума. Причем величина искомого сигнала неизвестна. Таким образом, в самостоятельном, отдельном измерении предстоит решить задачу о нахождении закона распределения суммы двух величин и плотности распределения вероятностей. Такую сумму или объединения двух независимых случайных событий называют сверткой или композицией. Такой метод объединения называют еще принципом суперпозиции.

Уравнения преобразования:

$\mu_{S+B}\ \{\omega\text{: } -\infty < \xi_{S+B}(\omega) < x\ \}$ (4); $P(\mu_{S+B})\ \{\omega\text{: } -\infty < \xi_{S+B}(\omega) < x\ \} = F_{\xi S+B}(x)$ (5)

Независимость случайных событий, причинно независимые события, независимость случайных событий по условию задачи, независимость в вероятностном смысле.

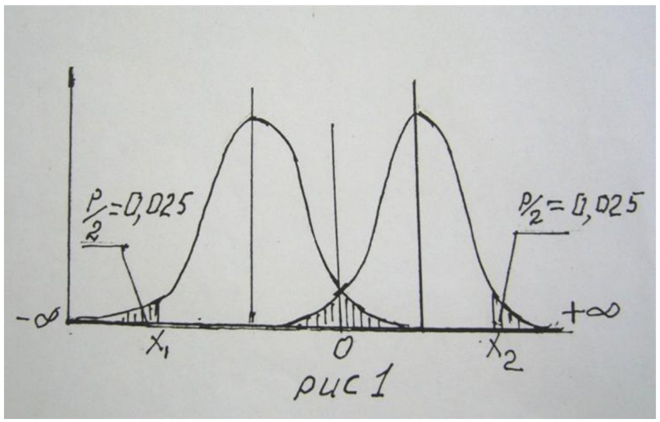
Исчисление суммы двух независимых случайных событий путем перемножения их производящих или характеристических функций.

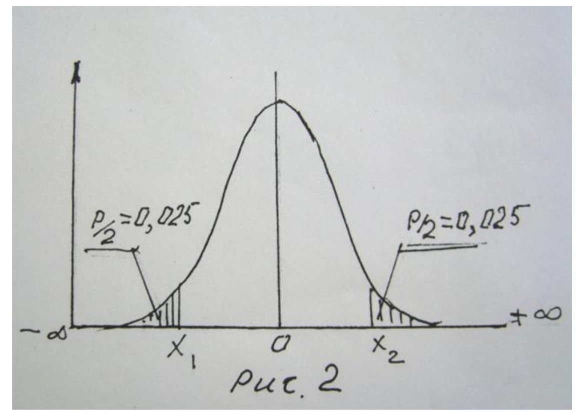
Названные выше такие понятия, как свертка, композиция, принцип суперпозиции имеют довольно сложную теорию. Эту теорию можно показать в отдельном докладе. Но ниже будет показан способ формального подхода для получения нужных результатов измерения.

Теоретико-множественная разность двух случайных событий.

Т-М разность представляет собой событие, состоящее из элементов множества А, не принадлежащих событию Б.

Т-М=A\B, где событие A\B состоит в том, что событие А произошло, а В не произошло.





Если две случайные величины имеют один закон распределения, то закон распределения их суммы сохраняет устойчивость при сложении для независимых величин. При этом их параметры, то есть законы распределений, математические ожидания, дисперсии суммируются.

Проверка проведенных измерений

При завершении измерения принято, как правило, проверить с заданной ли достоверностью получен результат

или

“Проверить адекватны ли полученные результаты тем, которые были продекларированы.”

Дерффель «Статистика в аналитической химии». М., 1995 год.

Почти в каждой книге, где изложена теория вероятностей имеется раздел “Корреляционный анализ”, в котором приводятся следующие выражения для дисперсии суммы и разности независимых величин:

$\mathcal{D}\ (\xi_1 + \xi_2) = \mathcal{D}\,\xi_1 + \mathcal{D}\,\xi_2 \qquad \mathcal{D}\ (\xi_1 - \xi_2) = \mathcal{D}\,\xi_1 + \mathcal{D}\,\xi_2$

В общем случае, когда априори о независимости двух случайных величин ничего неизвестно, выражения для дисперсий имеют вид

$$\mathcal{D}\ (\xi_1 + \xi_2) = \mathcal{D}\,\xi_1 + \mathcal{D}\,\xi_2 + 2\rho\sqrt{\mathcal{D}\xi_1 \times \mathcal{D}\xi_2}$$

$$\mathcal{D}\ (\xi_1 - \xi_2) = \mathcal{D}\,\xi_1 - \mathcal{D}\,\xi_2 - 2\rho\sqrt{\mathcal{D}\xi_1 \times \mathcal{D}\xi_2}$$

Символом ρ обозначен коэффициент корреляции $\rho = \dfrac{m(\xi_1 - m\xi_1)(\xi_2 - m\xi_2)}{\sqrt{\mathcal{D}\xi_1 \times \mathcal{D}\xi_2}}$

Ковариация, характеризующая область совместного распределения двух

величин $cov(\xi_1, \xi_2) = m(\xi_1 - m\xi_1)(\xi_2 - m\xi_2) = \rho\sqrt{\mathcal{D}\xi_1 \times \mathcal{D}\xi_2}$